

## UNA PROPUESTA PARA EL TRATAMIENTO DEL CONCEPTO DE ÁREA EN EGB.

Ana María Mántica, Marcela Götte y María Susana Dal Maso  
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral. Argentina.  
[amantica@fhuc.unl.edu.ar](mailto:amantica@fhuc.unl.edu.ar) , [mgotte@fhuc.unl.edu.ar](mailto:mgotte@fhuc.unl.edu.ar) , [mdalmaso@fhuc.unl.edu.ar](mailto:mdalmaso@fhuc.unl.edu.ar)  
Campo de investigación: Pensamiento geométrico

### Resumen

En este artículo se presenta el análisis de cuestiones surgidas en la implementación de una secuencia didáctica para la enseñanza del concepto de área.

Los conceptos de área y perímetro son abordados generalmente en la enseñanza elemental, pero el trabajo que se realiza con ellos, tiene más que ver con aplicaciones de fórmulas que con los conceptos en sí, sobre todo en lo que a área se refiere.

La propuesta que diseñamos considera las problemáticas que plantea la adquisición de conceptos matemáticos y en particular, los geométricos, dada su doble naturaleza figural y conceptual. Consideramos distintas aproximaciones al concepto referidas a repartir equitativamente, comparar y reproducir, y medir.

Analizaremos las dificultades y fortalezas que se presentaron en su puesta en el aula.

Este trabajo se realiza en el marco del Proyecto de Investigación “Diseño de propuestas didácticas tendientes a superar dificultades en la enseñanza y en el aprendizaje de la Geometría Euclídea” que se desarrolla en el Departamento de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias.

Encuadramos el trabajo en el método de investigación-acción, según ( Mg Knight et al 2000), los objetivos de una investigación acción tienden a:

- Remediar problemas específicos o mejorar un conjunto de circunstancias que se desarrollan en el aula.
- Equipar al docente con nuevas técnicas y métodos, elevando su autoconocimiento.
- Introducir métodos innovadores para la enseñanza y el aprendizaje.
- Mejorar la comunicación entre el docente en ejercicio y el investigador académico.
- Proporcionar una alternativa para la resolución de problemas en el aula.

Este proceso en general incluye las fases de:

**Planificación:** planteo del problema, estimación del tiempo y de recursos.

**Acción y observación:** Diario del profesor, fichas, observador externo.

**Reflexión:** Evaluación: del proceso, del aprendizaje y de la acción del profesor. Problemas encontrados. Causas. Alternativas. Mejoras.

**Revisión:** Cambios a introducir. Nueva planificación de actividades.

Estas cuatro fases constituyen un peldaño de una espiral. Cuando se termina la última fase, se pone en marcha el siguiente peldaño, que incluye nuevamente las cuatro fases.

En este artículo presentamos la fase de reflexión de la segunda etapa de este proceso.

Se considera la tarea realizada por el equipo de investigación en el tercer ciclo de la EGB sobre la enseñanza del concepto de área y la relación entre los conceptos de área y perímetro.

Para la elaboración de esta secuencia se consideró lo realizado por el equipo de investigación en una propuesta didáctica sobre la independencia de área y perímetro implementada en un 8º año de una escuela de la ciudad de Santa Fe en el año 2001 durante dos jornadas, el análisis de lo trabajado llevó a la conclusión que “los conceptos de área y perímetro no están claros. Por un lado los alumnos afirmaron que, si no quitan ningún trozo las figuras tienen igual área y por otro, consideraron que al cortar trozos de una determinada figura y disponerlos de manera más dispersa, el "lugar " ocupado por ésta es mayor que el de la original y por lo tanto tiene mayor área y mayor perímetro” (Mantica et al, 2002, pp117). Esto nos llevó a comenzar el diseño con el concepto de área.

En la elaboración de esta nueva propuesta se tuvieron en cuenta los aportes de (Freudenthal, 1983) quien plantea la gran profundidad y sofisticación del concepto de área. Dentro de las aproximaciones, que trata este autor, para la formación del concepto de área consideramos las siguientes:

**Repartir equitativamente,** aquí incluye situaciones en las que dado un objeto hay que repartirlo y los distintos modos de realizarlo. Se pueden aprovechar regularidades; realizar estimaciones superponiendo partes e ir equilibrándolas hasta conseguir que estas queden iguales o medir la cantidad a repartir, dividiendo esta medida entre el número de partes que se desea y medir cada una de estas partes.

**Comparar y reproducir,** se consideran situaciones para las que hay que comparar dos superficies pero también aquellas en las que se debe realizar una reproducción de una superficie con una forma diferente. Esto puede realizarse por inclusión, si una superficie está contenida en la otra; por transformaciones de romper y rehacer en la que se descompone una superficie en partes y se reorganizan obteniendo figuras de diferente forma pero de igual área; por medio de funciones cuando las superficies se expresan con fórmulas o cuando a partir de la gráfica es posible obtener una de ellas realizando traslaciones, giros y simetrías hasta superponerlas.

**Midiendo,** por exhaustión con unidades; por acotación entre un nivel superior e inferior; por transformaciones de romper y rehacer, proceso por el que generalmente se deducen las fórmulas de las figuras geométricas; o por medio de relaciones geométricas generales midiendo las dimensiones lineales y aplicando fórmulas para obtener la medida.

La propuesta se llevó a cabo en 7º y 8º año de EGB de una escuela de la ciudad de Santa Fe durante los años 2003 y 2004 con el mismo docente y el mismo grupo de alumnos.

En la implementación de la secuencia en la que se proponen actividades tendientes a provocar una ruptura entre las imágenes intuitivas y las deducciones lógicas de ciertas propiedades de las que gozan las superficies, se destacan aspectos positivos y dificultades presentadas en la adquisición del concepto por parte de los alumnos.

En primer lugar se expondrán las fortalezas:

### ***Áreas de figuras en 2D y 3D***

En la primera actividad se les solicita dibujar superficies y los alumnos grafican tanto figuras en dos dimensiones como en tres dimensiones. Esto muestra que se debe dar a los alumnos la oportunidad de captar al área como una cualidad de los objetos, descartando el carácter bidimensional de las superficies consideradas, no limitándose al caso de los polígonos sino trabajando el área en los contextos en que aparece. “La percepción del área

puede desarrollarse a partir de la idea de *cubrir objetos*; actividad que también puede realizarse para el caso de recintos no planos” (del Olmo et al, 1993, pp 48)

### ***Cálculo de áreas respecto de unidades no convencionales***

No se presentaron dificultades en las actividades para obtener el área de una figura en función de una unidad dada, pudieron cortar, plegar, calcar, copiar, transformar, embaldosar ... para realizar dicha tarea.

Una de las actividades propuesta consiste en determinar la posibilidad de embaldosar distintas figuras dadas por el docente con ciertas figuras consideradas como baldosas. En la construcción de la figura se tuvo en cuenta que sean embaldosables sólo con algunas de las baldosas dadas. Estas últimas se construyen de manera que permitan calcular las áreas de las figuras dadas con todas las baldosas tomadas como unidad sin necesidad que estas embaldosen la superficie, considerando la relación entre las áreas de las distintas baldosas. Esto muestra que los alumnos no parecen necesitar las fórmulas para iniciar el cálculo de áreas sino que prefieren utilizar otras estrategias, como cuadrricular la figura y contar cuadrados. “Se deben plantear situaciones donde se precise la *búsqueda de un intermediario* para poder comparar figuras [...] Las actividades de *pavimentado* son muy aconsejables y facilitarán, posteriormente, las tareas de aritmetización” (del Olmo et al, 1993, pp 63)

Se presentan ahora las dificultades que se les plantea a los alumnos a la hora de la adquisición del concepto de área:

### ***Respecto de la medida***

Las figuras que no se dan pavimentadas generan en los alumnos la dificultad de tener que seleccionar la unidad de medida.

Se les entregó a los alumnos dos cuadrados distintos y se les pide analizar cuál de los dos tiene mayor área. Uno de los grupos cuadrícula las figuras con cuadrados iguales en cada una pero con lados de longitud diferente. Concluyen que ambas están formadas por 16 cuadrados por lo tanto ninguna es mayor que la otra (Figura 1). Plantean sus procedimientos y discuten con todos los alumnos de la clase hasta acordar que el modo utilizado por este grupo es erróneo, pues los cuadrados en los que se dividió cada una de las figuras “no tienen igual longitud de lado”.

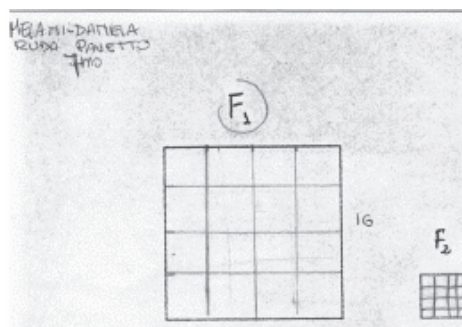


Figura 1

Evidencian una dificultad mayor para representar figuras de un área determinada si no cuentan con papel cuadriculado.

Cuando se les solicita representar figuras de un  $\text{cm}^2$  de área representan distintas figuras haciendo modificaciones al cuadrado de 1 cm de lado, ya sea contando el número de cuadrados de la hoja que lo forman o quitando una parte del cuadrado de 1 cm de lado o de uno de los cuadrados de la hoja, y colocándolo en otro lado, obteniendo una figura distinta, pero equivalente en área a la dada. Aparecen figuras cóncavas y convexas en las modificaciones realizadas. En cambio, cuando se les solicita dibujarlas en papel liso, la mayoría dibuja polígonos cuyos lados tienen una longitud de 1 cm.

“El grado de éxito con que los niños alcanzan a conceptualizar la definición de área en aquellas situaciones en que el espacio no se encuentra *visualmente* recubierto con unidades necesarias es muy inferior al de las situaciones en las que el recubrimiento de la superficie que hay que medir salta a la vista” (Dickson, et al, 1991, pp 120).

#### ***El contar unidades no enteras***

Se les entrega a los alumnos dos rectángulos para que determinen cuantas veces mayor es uno respecto del otro, de tal manera que el de menor área no entra un número exacto de veces en el de mayor área. Con esto pretendemos evitar que el alumno identifique “que la unidad de área elegida debe entrar un número entero de veces en la otra” o “que el área es un número natural”.

Los alumnos presentan inconvenientes al comparar estas figuras. En principio suponen que se debe a un error de medición, descartada esta posibilidad comienzan a rellenar el interior de la superficie a medir con unidades colocadas unas junto a otra y no superpuestas, y en aquellas partes de la superficie donde no es posible ubicar la unidad se recurre a rellenar con unidades más pequeñas, es decir que utilizan el método por exhaustión por unidades.

Contar cuadrados enteros o mitades resulta fácil pero se complica la tarea si se debe considerar cuartos u octavos, mucho mas difícil resulta si la unidad es un rectángulo o un triángulo (Figura 2). “Con frecuencia se abusa en el uso de medidas enteras, de esta forma en los problemas suelen obtenerse siempre números enteros para las soluciones y el alumno tiende a pensar que todas las medidas son así” (Chamorro y Belmonte, 1994, pp 47)

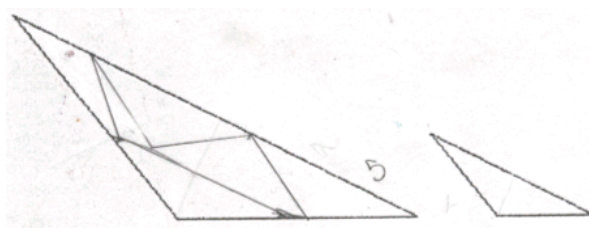


Figura 2

#### ***Confusión área – perímetro***

El hecho que dos figuras tengan el mismo área induce a algunos alumnos a creer que tienen el mismo perímetro.

En la actividad “rodear las figuras que ocupan el mismo lugar en la hoja”, se presentan distintos hexaminos sin pavimentar. Algunos grupos consideraron los perímetros de dichas figuras y no las áreas.

En otra actividad se le presentan distintas figuras y se les solicita que rodeen las de igual área y que calculen el perímetro de las que tienen igual área. Algunos alumnos miden los lados de las figuras, suman dichas longitudes y concluyen que ninguna de las figuras dadas tienen igual área porque tienen distintas medidas, haciendo alusión a los perímetros.

También se les solicitó que modifiquen un polígono dado de manera de obtener otro de menor área y mayor perímetro. Ninguno de los grupos logró cumplir la consigna pedida. En algunos casos pudieron modificar el perímetro manteniendo el área y en otros logran disminuir el área pero no aumentar el perímetro.

Muchas veces los alumnos se dejan llevar por lo perceptual sin realizar un análisis conceptual de la situación. “Es muy posible que los alumnos no dispongan de oportunidades suficientes para la exploración práctica de los fundamentos espaciales de estas dos ideas y de las relaciones que las ligan” (Dickson, et al , 1991, pp 124)

Esta confusión entre el área y el perímetro es de tal persistencia que según (Chamorro, M. 1995) puede ser considerada como un “obstáculo epistemológico” que requiere un tratamiento específico.

En el desarrollo de la secuencia se observa que los alumnos se acercan al concepto de área haciendo uso de las aproximaciones que plantea Freudenthal, como por ejemplo utilizando el método de exhaustión por unidades, por transformaciones geométricas, por transformaciones de romper y rehacer, reparto equitativo por cuadrículado, por inclusión y aplicación de fórmulas midiendo las dimensiones lineales.

En la figura 2 es posible ver como utilizan el método de exhaustión por unidades y la dificultad que presenta el hecho que la unidad no sea un cuadrado.

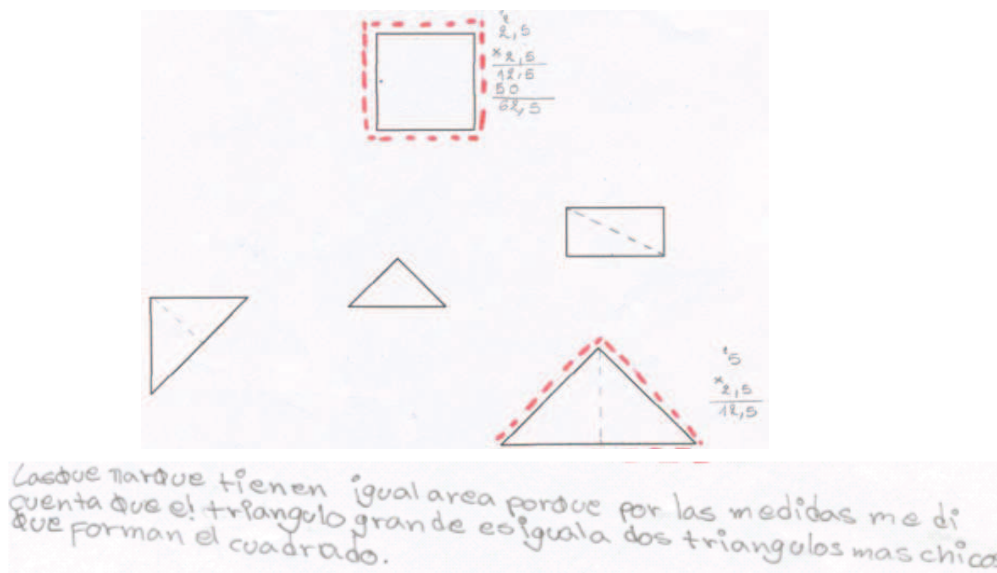


Figura 3

En la figura 3 se aprecia como se utilizan las transformaciones de romper y rehacer para comparar las áreas de las figuras dadas.

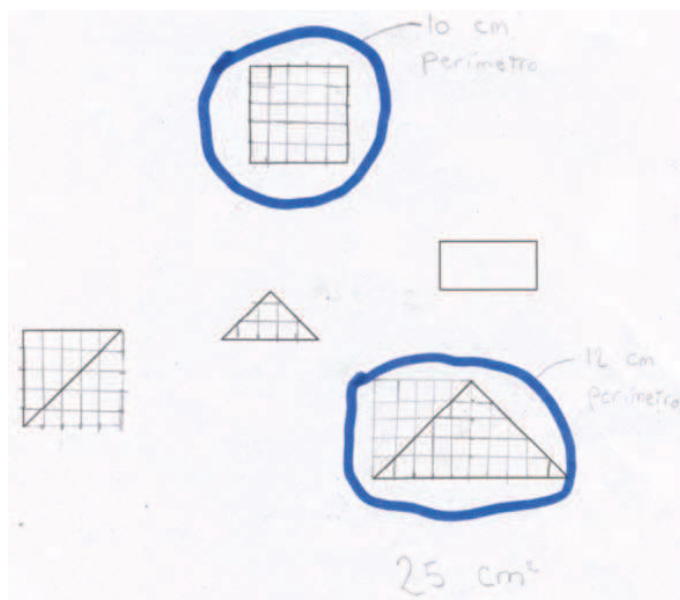


Figura 4

En la figura 4 también se utilizan las transformaciones de romper y rehacer pero además aparece el reparto equitativo por cuadrículado

Es importante remarcar lo que sobre la formación de conceptos geométricos sostiene Fischbein (1993) quien desarrolla la teoría de los conceptos figurales. “El concepto figural es una entidad única que permanece bajo la doble y muchas veces contradictoria influencia de los sistemas con que está relacionado (el conceptual y el figural). El sistema conceptual debería controlar los significados, las relaciones y las propiedades de la figura. Muchos errores en los razonamientos pueden tener su origen en la separación entre el aspecto conceptual y figural de los conceptos figurales. Las imágenes y los conceptos interactúan en la actividad cognitiva del sujeto cooperando en algunos casos o en conflicto en otras situaciones. Pero el desarrollo de conceptos figurales no es, generalmente, un proceso natural. Debería tenderse desde la propuesta de enseñanza a que los conceptos figurales se desarrollen naturalmente hacia su forma ideal. Una de las principales tareas de la Educación Matemática (en el dominio de la geometría) es crear secuencias didácticas que apunten a una cooperación estricta entre los dos aspectos, hasta la fusión en objetos unitarios”. (Mántica et al, 2005, pp 27)

#### Bibliografía

Chamorro, M. y Belmonte, J. (1994): *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Síntesis. Madrid.

Chamorro, M (1995): "Aproximación a la medida de las magnitudes en la Enseñanza Primaria", en UNO Procedimientos en Matemáticas N° 3. Graó. Barcelona. 31- 53

Del Olmo, M.; Moreno, M. Gil, F. (1993): *Superficie y volumen ¿algo más que el trabajo con fórmulas?*. Madrid. Síntesis.

Dickson, L.; Brown, M.; Gibson, O.; (1991): "Medida", en *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona. Labor. 88 - 181.

Douady, R. y Perrin, M. (1988): "Investigaciones en didáctica de matemáticas: Áreas de superficies planas en CM y 6ème". En *Hacer Escuela N°9*. Escuela Nueva Soc. Coop. Ltda. Buenos Aires. 34 - 60.

Fischbein, E. (1993): " The theory of figural concepts" en *Educational Studies in Mathematics*, 24. 139 - 162.

Freudenthal, H. (1983): *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel Publishing Company. Boston.

Mántica, A.; Marzioni, A.; Dal Maso, M. y Götte, M. (2002): "La confusión entre área y perímetro. Análisis de una propuesta áulica". En *Educación Matemática*, Vol.14, N° 1. 111-119. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Mántica, A.; Götte, M. y Dal Maso, M. (2005): "Un camino para la comprensión del concepto de área". En *Yupana. Revista de Educación Matemática*, Número 2. Universidad Nacional del Litoral. Argentina. 25-40

Mc Knight , C.; Magid, A.; Murphy, T. y Mc Knight, M (2000): *Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician*. Rhode Island: